10 МНОГОШАГОВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ. ПОНЯТИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

10.1 Понятие обыкновенного дифференциального уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную t, неизвестную функцию $u(t)$ и ее производные до некоторого порядка n.

$$f(t,u(t),u'(t),u''(t),\ldots,u^{(n)}(t))=0$$

Порядок старшей производной, входящей в уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений, каждое из которых связывает независимую переменную t, компоненты неизвестной вектор- функции $\vec{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t))$ и их производные до некоторого порядка n.

$$\vec{F}(t,\vec{u}(t),\vec{u}'(t),\vec{u}''(t),\ldots,\vec{u}^{(n)}(t))=0$$

Примеры.

$$\frac{du}{dt}=-au$$

1) Уравнение описывает радиоактивный распад вещества, где $u(t)$ - масса радиоактивного вещества в момент времени t, $a>0$ - известная постоянная величина, называемая сечением распада.

2) Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x''(t)=-\dfrac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ y''(t)=-\dfrac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

описывает движение планеты вокруг Солнца. Здесь $x(t),\ y(t)$ - неизвестные координаты планеты относительно Солнца в момент времени t.

Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнений любого порядка.

Известно, что любое обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$u^{(n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$$

с помощью замены

$$u_0(t)=u(t),\ u_1(t)=u'(t),\ u_2(t)=u''(t),\ldots,u_n(t)=u^{(n)}(t)$$

можно свести к эквивалентной системе n уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} u_0'(t) = u_1(t) \\ u_1(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_3(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-2}'(t) = u_{n-1}(t) \\ u_{n-1}'(t) = f(t, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{cases}.$$

Аналогично, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить некоторой эквивалентной системой уравнений первого порядка. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad i = 1,2,...,m$$

записывая их для краткости в векторной форме

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}).$$

Различают три основных типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения.

10.2 Задача Коши

Рассматривается следующая задача: найти неизвестную вектор-функцию $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$, удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}), \quad t > 0 \tag{74}$$

и начальному условию:

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^{(0)} \tag{75}$$

Если расписать систему (74)-(75) покомпонентно, то получим:

$$\begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad t > 0 \\ u_i(0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{76}$$

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что если функции $f_i, i=1,2,...,m$ непрерывны по всем аргументам в замкнутой области: $D=\{|t|\le a, \quad |u_i-u_i^0|\le b, \quad i=1,2,...,m\}$, откуда следует их ограниченность, т.е. существует постоянная $M>0$ такая, что всюду в D: $|f_i|\le M, \quad i=1,2,\dots,m$ функции $f_i, i=1,2,...,m$ в области D удовлетворяют условию Липшица по аргументам $u_1,u_2,\dots,u_m$, т.е.

$$|f_i(t,u_1',u_2',\dots,u_m')-f_i(t,u_1'',u_2'',\dots,u_m'')|\le L\left(|u_1'-u_1''|+|u_2'-u_2''|+\dots+|u_m'-u_m''|\right)$$

для любых точек $(t,u_1',\dots,u_m')$ и $(t,u_1'',\dots,u_m'')$ в области D то существует единственное решение $\vec{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_m(t))$ системы (74), определенное при $|t|\le t_0=\min(a,\frac{b}{M})$ и принимающее при $t=0$ заданные начальные значения (75).

В дальнейшем предполагаем, что решение задачи (74)-(75) существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Решить задачу (74)-(75) точно, т.е. выразить решение через элементарные функции или представить его при помощи квадратур от элементарных функций, удается далеко не всегда, особенно если правая часть уравнения (74) представляет из себя нелинейную функцию. Поэтому приходится решать ее с использованием численных методов.

10.3 Случай одного уравнения

Рассмотрим случай когда $m=1$, т.е. задача (3) представляет из себя лишь одно уравнение с одной неизвестной функцией $u(t)$ и одно начальное условие:

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=f(t,u), \quad t>0\\ u(0)=u_0\end{cases} \tag{77}$$

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau>0$, т.е. рассмотрим множество точек $\omega_\tau=\{t_n=n\tau, n=0,1,2,\dots\}$.

Будем обозначать через $u(t)$ точное решение задачи (4), а через $y_n=y(t_n)$ - приближенное. Заметим, что приближенное решение является сеточной функцией, т.е. определено только в точках сетки ω_τ.